مادة MATH1351

تلخيص مادة الإمتحان النهائي

CHAPter (3, 4, 5)

تلخيص وإعداد الطالب: علي شتية

3.1 Matrices
المصفوفات

* يجب أن يكون الحرف الذي يمثل المصفوفة Capital Letter
(حرف كبير)

* رتبة المصفوفة = عدد الصفوف X عدد الأعمدة

* المصفوفة A عبارة عن square (مصفوفة مربعة)

square ⇐ يعني أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

عدد الصفوف ← 3X3 → عدد الأعمدة

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

* المصفوفة B عبارة عن square (مصفوفة مربعة)

$$C=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

* المصفوفة C عبارة عن Coloumn matrices
على شكل عمود

$$D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

* المصفوفة D عبارة عن Row matrices على شكل صف

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

* المصفوفة E عبارة عن Zeromatrices
مصفوفة صفرية

Example: find the a_{12} , b_{22} , c_{31} , d_{13}

a_{12} ⇐ هو الرقم الذي يوجد في الصف الأول من العمود الثاني ⇐ $\boxed{-1 = a_{12}}$

b_{22} ⇐ هو الرقم الذي يوجد في الصف الثاني من العمود الثاني من المصفوفة B ⇐ $\boxed{3 = b_{22}}$

c_{31} ⇐ // // // // // // // // // // C // // الأول // // الثالث // // // // // // ⇐ $\boxed{0 = c_{31}}$

d_{13} ⇐ // // // // // // // // // // D // // الأول // // الثالث // // // // // // ⇐ $\boxed{1 = d_{13}}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

* Identity matrices مصفوفة الوحدة
* وهي عبارة عن مصفوفة مربعة square
* كل مصفوفة وحدة عبارة عن مصفوفة مربعة
* ليست كل مصفوفة مربعة عبارة عن مصفوفة وحدة

$F = [1]_{1\times1}$ ⇒ Identity matrices of size one

$G = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix}_{4\times4}$ ⇒ Identity matrices of size four

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ ⇒ Identity matrices of size two

$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$ X

* صحيح أن المصفوفة N مربعة ولكن ليست وحدة

العمليات على المصفوفات

* Two matrices A and B are equal if $a_{m\times n} = b_{m\times n}$ for all m and n
A, B have same size.

* مصفوفتين A و B متساويات وتكون المصفوفتين متساوية الحجم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A \neq B$$

⇒

Example:

if $A = \begin{bmatrix} 5x & 2y \\ z & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -3 & w \end{bmatrix}$

$A = B$ find x, y, z, w

$x \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{10}{5} \Rightarrow \boxed{x = 2}$, $y \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{y = 3}$

$z \Rightarrow \boxed{z = -3}$, $w \Rightarrow \boxed{w = 4}$

Example: if $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ find the $A+B$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+-1 & -1+0 \\ 0+2 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Example: if $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Find the $A+C$

$\Rightarrow A+C \Rightarrow$ No Solution

* لا يوجد حل لأن لا يجوز الجمع بين مصفوفتين ليس لديهما نفس الحجم

$\Rightarrow$ The negative of a matrices A is $(-A)$

من السؤال السابق يطلب $(-A)$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

* قاعدة

$B - A = B + (-A)$

$\Rightarrow$

Find the B-A

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$B-A \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1-2 & 0+1\\ 2-0 & 5-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$A+B = B+A$

$A-B \neq B-A$

* عملية الجمع في المصفوفات تبديلية
* عملية الطرح في المصفوفات ليست تبديلية

* scalar multiplication ضرب المصفوفات بعدد

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

Find the $\frac{1}{2}A$ and $3B$ and $0A$

$$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 6\\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$0A=\begin{bmatrix}0\times 3 & 0\times 6\\ 0\times 0 & 0\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

أو على شكل $0_{2\times 2}$

$$3B=\begin{bmatrix}3\times 2 & 3\times 1\\ 3\times 4 & 3\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 12 & 15\end{bmatrix}$$

❀ The transpose of a matrices is A^T

* transpose هو تبديل الصف بالعمود
* عند عمل transpose تقلب الرتب

$A_{axb} \Rightarrow$ تصبح A^T_{bxa}

Example

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

if $A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$

Find the $A+B$, A^T+B , B^T+A^T

① $A+B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ = no Solution

* لأن المصفوفتين ليسا نفس الحجم

② A^T+B

* لكي أوجد المطلوب يجب أن أوجد A^T

$A^T=\begin{bmatrix}5 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$A^T+B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

③ B^T+A^T

* لكي أوجد المطلوب يجب أن أوجد B^T

$B^T=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$B^T+A^T=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}$ = no solution

* لأن المصفوفتين ليستا نفس الحجم

3.1

out Line حل أسئلة

الأسئلة المطلوبة هي 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 22, 27, 31, 34 .

* use the following matrices for problem : 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 22, 27.

* إستخدم المصفوفات التالية لحل الأسئلة المطلوبة .

~~② what is the order of matrix B have~~

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix},\ Z=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

② what is the order (size) of matrix E ??

② ماهي رتبه المصفوفة E ؟؟

$\Rightarrow 2\times 3 \Rightarrow E_{2\times 3}$

④ write the negative of D ??

④ أكتب السالب من المصفوفة D ؟؟

$\Rightarrow$ (-D) $\Rightarrow -D=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -3 & -5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$

⑥ write a zero matrix that is the same order as D.

⑥ أكتب مصفوفة صفرية بحيث تكون رتبتها مثل رتبة D .

$\Rightarrow O_{2\times 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

⑦ which of the matrices A, B, C, D, E, F, G, and Z are square ??

⑦ أي المصفوفات التالية مربعة ؟؟

$\Rightarrow$ A, C, D, F, G, Z

⑨ what is the element a_{23} ??

⑨ ماهو العنصر a_{23}

$\Rightarrow \boxed{1}$

⑪ write the transpose of matrix A

⑪ أكتب تبديل المصفوفة A ؟؟

$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

⑬ what is sum of matrix A and its negative?

⑬ ماهو مجموع المصفوفة A مع المعاكس منها ؟

$\Rightarrow A+(-A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

⑭ if matrix A has element $a_{3j} = 0$ what is j ??

⑭ اذا كان العنصر a_{3j} في المصفوفة $A = 0$ ماقيمة j ؟؟

a_{3j} عبارة عن قيمة العامود j رتبة العنصر

$\Rightarrow j = 2$ (العامود الثاني)

(15) C+D

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

(22) B+F = no solution لا يوجد حل

(27) 2A − 3B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 0 \\ 12 & 6 & 3 & 3 \\ 9 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \text{no Solution}$$

* Find x, y, z, w

(31) $$\begin{bmatrix} x & 3 & (2x-1) \\ y & 4 & 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x-4) & z & 7 \\ 1 & (w+1) & (3y+1) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x = 2x - 4 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

$\boxed{y = 1}$, $\boxed{z = 3}$

$w + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{w = 3}$

(34) $$\begin{bmatrix} 3x & 12 \\ 12y & 3w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8x & 4z \\ -6 & -4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

~~$x = 5$~~ $\boxed{x = -4}$ $\boxed{z = -2}$

$\boxed{y = 6}$ ~~$w = 14$~~

$\boxed{w = 2}$

8

3.2 Multiplication of matrices

ضرب المصفوفات

* قاعدة ⟶ $A_{m,n} \cdot B_{n,r} = C_{m,r}$

يجب أن يكونا متساويين حتى تتم عملية الضرب

example: $A_{3,5} \cdot B_{5,6} = C_{3,6}$

هذان العددان هما رتبة الحد الناتج ولا يشترط أن يكونا متساويين

example: Find $A.B$ if $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3,2}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2,3}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{2,2}$

* قبل البدء بعملية الضرب يجب أن نتأكد الرتب يحقق شرط الضرب

$2 = 2 \Leftarrow$ تجوز عملية الضرب

نضرب الصف بالعمود

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3,2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2,3}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.5 + -1.1 & 5.0 + -1.2 & 5.-1 + -1.0 \\ 0.5 + -2.1 & 0.0 + -2.2 & 0.-1 + -2.0 \\ 3.5 + 1.1 & 3.0 + 1.2 & 3.-1 + 1.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 + -1 & 0 + -2 & -5 + 0 \\ 0 + -2 & 0 + -4 & 0 + 0 \\ 15 + 1 & 0 + 2 & -3 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -2 & -5 \\ -2 & -4 & 0 \\ 16 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{3,3}$$

~~Find C.B~~

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{2,2} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \neq$ ~~No solution~~ $\Rightarrow$

مثال السؤال السابق ⇐ Find C.A

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{No Solution}$$

2×2 ، 3×2 ، 2 ≠ 3

* لا يوجد حل لأن العددين غير متساويين

Example: Find d_{13} and d_{34}, if you know $A \cdot B = D$

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال ⇐ أوجد d_{13} ، d_{34} اذا علمت أن $A \cdot B = D$

* لكي نجد d_{13} و d_{34} لا نحتاج الى إيجاد D كاملة نحن فقط بحاجة الى المعرفة d_{13} ، d_{34}

⇐ لنجد d_{13} نأخذ الصف الاول من المصفوفة A $[2\ 3\ 1]$ ونضربه بالعمود الثالث من المصفوفة B $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$d_{13} = [2\ 3\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow d_{13} = \underline{2.2 + 3.2 + 1.2} \Rightarrow d_{13} = \underline{4+6+2} = \boxed{12}$$

⇐ لكي نجد d_{34} نأخذ الصف الثالث من المصفوفة A $[5\ 1\ 4]$ ونضربه بالعامود الرابع من المصفوفة B $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$d_{34} = [5\ 1\ 4] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow d_{34} = \underline{5.1 + 1.0 + 4.3} \Rightarrow d_{34} = \underline{5+0+12}$$

$$d_{34} = \boxed{17}$$

3.2

حل أسئلة out Line

الأسئلة المطلوبة: 1, 5, 7, 9, 13, 28, 29, 30

① (a) $[1\ 2\ 3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [1.4+2.5+3.6] \Rightarrow [4+10+18]$

$= [32]$

(b) $[1\ 2] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [1.3+2.4 \quad 1.5+2.6] \Rightarrow [3+8 \quad 5+12]$

$= [11\ \ 17]$

⑤ D.E

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.1+2.5 & 4.0+2.1 & 4.4+2.0 \\ 3.1+5.5 & 3.0+5.1 & 3.4+5.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+10 & 0+2 & 16+0 \\ 3+25 & 0+5 & 12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 16 \\ 28 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

⑦ A.B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.4+2.3 & 1.1+0.2+2.2 & 1.3+0.1+2.0 & 1.0+0.1+2.1 \\ 3.1+2.4+1.3 & 3.1+2.2+1.2 & 3.3+2.1+1.0 & 3.0+2.1+1.1 \\ 4.1+0.4+3.3 & 4.1+0.2+3.2 & 4.3+0.1+3.0 & 4.0+0.1+2.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 \\ 14 & 9 & 11 & 3 \\ 13 & 10 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

④ B.A

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.4 ≠ 3.3

العدد بين غير متساويين

= undefined, no solution

(13) $E \cdot A^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+0.0+4.2 & 1.3+0.2+4.1 & 1.4+0.0+4.3 \\ 5.1+1.0+0.2 & 5.3+1.2+0.1 & 5.4+1.0+0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 7 & 16 \\ 5 & 17 & 20 \end{bmatrix}$$

(28) $A \cdot Z$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(29) $A \cdot I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+5.0+4.0 & 2.0+5.1+4.0 & 2.0+5.0+4.1 \\ 1.1+4.0+3.0 & 1.0+4.1+3.0 & 1.0+4.0+3.1 \\ 1.1+-3.0+-2.0 & 1.0+-3.1+-2.0 & 1.0+-3.0+-2.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

* حاصل ضرب أي مصفوفة في مصفوفة الوحدة هي المصفوفة ذاتها (Identity)

(30) $I \cdot A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

4.1 Linear inequalities in two variables

Examples- graph each inequality

① $4x-2y \leq 6$

أولاً: نحول $\leq$ الى $=$

$4x-2y=6$

ثانياً: نجد x-intercept و y-intercept

x-intercept $(\frac{3}{2}, 0)$

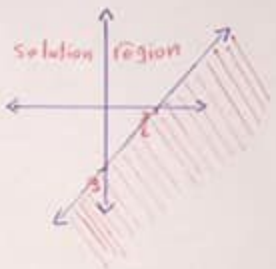
$4x-2\cdot 0=6 \Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$

y-intercept $(0,-3)$

$4\cdot 0-2y=6 \Rightarrow \frac{-2y}{-2}=\frac{6}{-2} \Rightarrow \boxed{y=-3}$

ثالثاً: نعين النقاط على المستوى الديكارتي ونرسم خط متصل (——) لأن $\leq$

* إذا كان مطلوب في السؤال $<$ أو $>$ دون $=$ نرسم خط متقطع (.....)



رابعاً: نختار نقطة تسمى test point نختار النقطة $(0,0)$

وهذه النقطة نستخدمها لأني نعرف أي المنطقتين هي منطقة الحل solution region

نعوض $(0,0)$ في المعادلة $4\cdot 0-2\cdot 0 \leq 6$

$\boxed{0 \leq 6}$

العبارة صحيحة إذاً المنطقة التي توجد بها نقطة $(0,0)$ هي منطقة الحل

* و نظلل المنطقة التي لا توجد بها النقطة $(0,0)$

4.1

Example: Graph each inequality

② $\begin{cases} 3x-2y \geq 4 \\ x+y-3 > 0 \end{cases}$

$3x-2y=4$

x-intercept $(\frac{4}{3}, 0)$

$3x-2.0=4 \Rightarrow \frac{3}{3}x=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{4}{3}}$

y-intercept $(0,-2)$

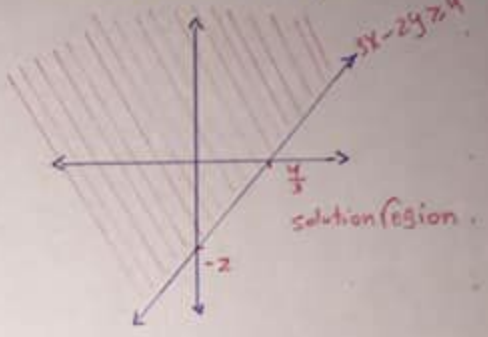
$3.0-2y=4 \Rightarrow \frac{-2}{-2}y=\frac{4}{-2} \Rightarrow \boxed{y=-2}$

testPoint $(0,0) \Rightarrow 3.0-2.0 \geq 4$

$\Rightarrow \boxed{0 \geq 4}$

* العبارة خاطئة اذاً أختار المنطقة التي لا يوجد بها $(0,0)$
وأظلل المنطقة التي يوجد بها $(0,0)$

* أولاً أرسم الاقتران $3x-2y \geq 4$



$x+y-3=0$

$x+y=3$

Xintercept $(3,0)$

$x+0=3 \Rightarrow \boxed{x=3}$

y-intercept $(0,3)$

$0+y=3 \Rightarrow \boxed{y=3}$

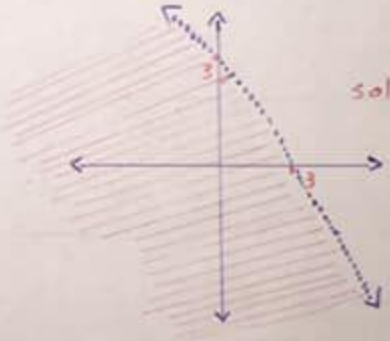
testPoint $(0,0)$

$0+0 \geq 3$

$\boxed{0>3}$

* ثانياً أرسم الاقتران $x+y-3>0$

* هنا المطلوب $>$ اذا الخط متقطع (.....)

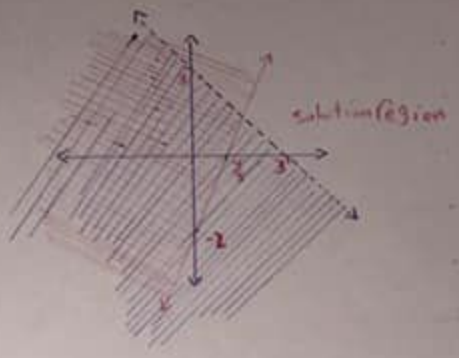


* عبارة خاطئة اذاً أختار المنطقة التي لا يوجد بها $(0,0)$
وأظلل المنطقة التي يوجد بها $(0,0)$

* الرسمة النهائية ⇐

4.1

$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y \geq 4 \\ x+y-3>0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ الرسم البياني $\Rightarrow$



Examples: Graph each inequality

① $2y > -4$

$\frac{2y}{2} = \frac{-4}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y = -2}$

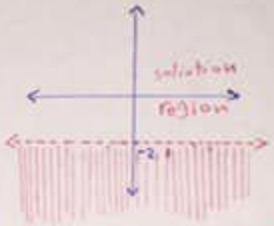
testPoint (0,0)

$2.0 > -4$

$\boxed{0 > -4}$

* أرسم الاقتران $2y > -4$

* خط متقطع لأنه $>$



* العبارة صحيحة اذا ظلل المنطقة التي لا يوجد فيها النقطة (0,0)

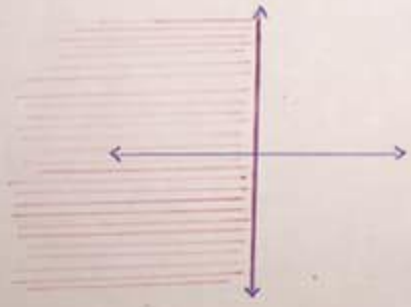
---

② $x \geq 0$

$\boxed{x = 0}$

* أرسم الاقتران $x \geq 0$

* هو عبارة عن خط عمودي وهو تقطعه محور y



* هنا نأخذ النقطة (1,0) بدل (0,0)

لأن (0,0) واقعة على خط الحل

$\boxed{1 \geq 0}$ العبارة صحيحة اذاً نظلل المنطقة

التي لا توجد فيها النقطة (1,0)

$\Rightarrow$

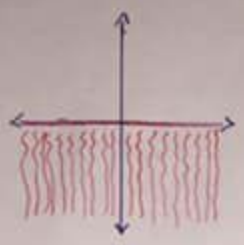
4.1

③ $y \geq 0$

$y = 0$

* أرسم الإقتران $y \geq 0$

* هو عبارة عن خط افقي وهو نفسه محور X



* هنا نأخذ النقطة $(0,1)$ بدل $(0,0)$

. لأن $(0,0)$ واقعة على خط الحل

$0 \geq 1$ العبارة صحيحة اذاً نظلل المنطقة التي لا توجد فيها النقطة $(0,1)$

test Point

④ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

* أرسم الاقتران $x \geq 0$

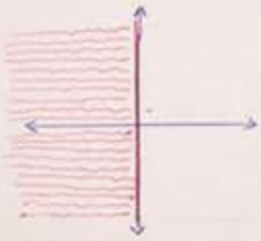
$x = 0$

. هو عبارة عن خط عمودي وهو نفسه محور y

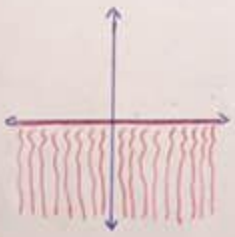
. نأخذ $(1,0)$ كنقطة إختبار

$0 \geq 1$ العبارة صحيحة اذاً نظلل المنطقة التي

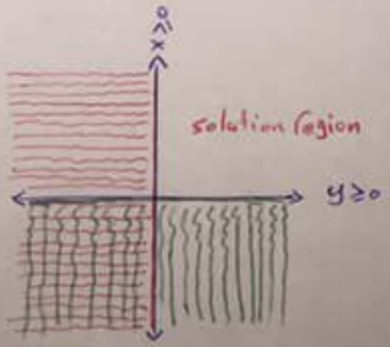
. لا توجد بها النقطة $(1,0)$



* رسمة الاقتران $y \geq 0$ من السؤال السابق ⇐

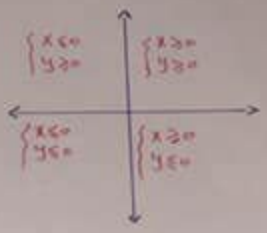


الرسمة النهائية ⇐



4.1

* هذه الرسمة للحفظ لمن أراد المرجعة في الحل والحل مباشرة



Example:- graph each inequality

$$\begin{cases} x+2y \leq 14 \\ 2x+y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

* أولاً نرسم الإقتران $x+2y \leq 14$

* نجد x-intercept و y-intercept

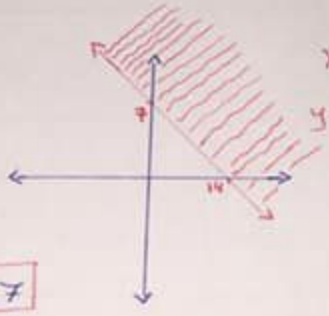
① $x+2y=14$

x-intercept = $(14,0)$

$x+2.0=14 \Rightarrow \boxed{x=14}$

y-intercept = $(0,7)$

$0+2y=14 \Rightarrow \frac{2y}{2}=\frac{14}{2} \Rightarrow \boxed{y=7}$



testPoint $\Leftarrow (0,0)$

لـ $0+2.0 \leq 14 \Leftarrow \boxed{0 \leq 14}$

العبارة صحيحة إذاً نحذف المنطقة التي لا يوجد بها النقطة $(0,0)$

* ثانياً نرسم الإقتران $2x+y \leq 10$

* نجد x-intercept و y-intercept

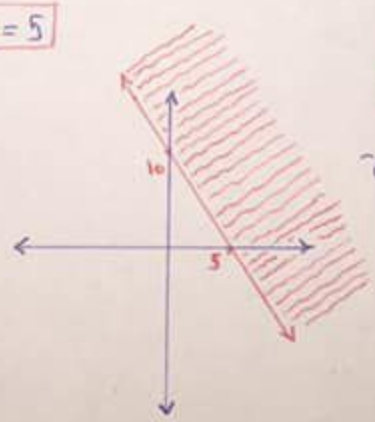
② $2x+y=10$

x-intercept = $(5,0)$

$2x+0=10 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{x=5}$

y-intercept = $(0,10)$

$2.0+y=10 \Rightarrow \boxed{y=10}$



testPoint $\Leftarrow (0,0)$

لـ $2.0+0 \leq 10 \Leftarrow \boxed{0 \leq 10}$

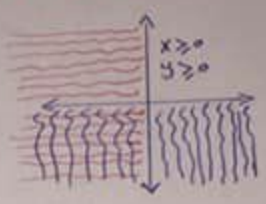
العبارة صحيحة إذاً نظلل المنطقة التي لا يوجد فيها النقطة $(0,0)$

⇒

4.1

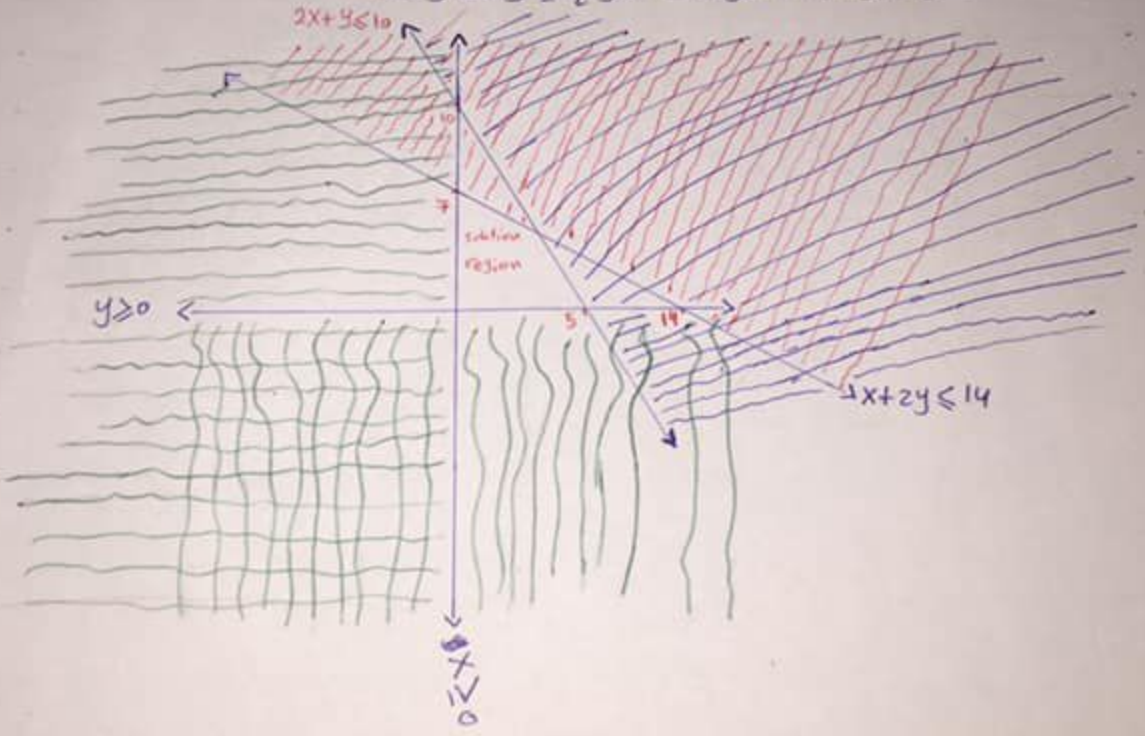
② $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

- من خلال الرسمة التي في صفحة 5
- نرسم الاقترانين مباشرة دون اللجوء الى حل كل رسمة



$\Leftarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

* ثالثاً ندمج أرسمة الاقترانات الأربع في رسمة واحدة



4.1

Out Line حل أسئلة

الأسئلة المطلوبة 3, 5, 6, 7, 13, 14, 18, 25

③ graph each inequality

$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} < 1$

* يجب أن نتخلص من المقام عن طريق LCD

LCD = 2 : 2.1

4 : 2.2

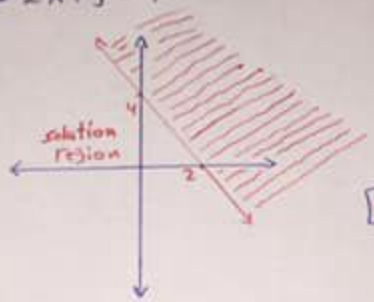
LCD = 4

$\frac{x}{2} \cdot 4 + \frac{y}{4} \cdot 4 = 1 \cdot 4 \Rightarrow 2x + y = 4$

. $2x + y = 4$

x-intercept = (2, 0)

y-intercept = (0, 4)



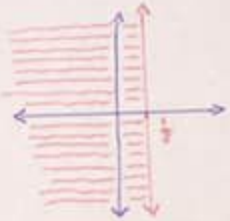
(0,0) test Point

$\frac{0}{2} + \frac{0}{4} < 1 \Leftarrow 0 < 1$

---

⑤ $\frac{1}{4}x \geq \frac{1}{8}$

$\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$



(0,0) test Point

$\frac{1}{4} \cdot 0 \geq \frac{1}{8} \Leftarrow 0 \geq 8$

* العبارة خاطئة اذاً

نقلل المنطقة التي يوجد فيها (0,0)

---

⑥ $\frac{-y}{8} > \frac{1}{4}$

$\frac{-y}{8} \cdot 8 = \frac{1}{4} \cdot 8 \Rightarrow \frac{-y}{-1} = \frac{2}{-1} \Rightarrow y = -2$

(0,0) test Point

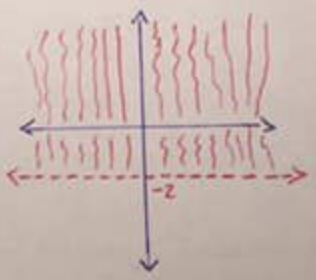
$\frac{-0}{8} > \frac{1}{4} \Leftarrow 0 > \frac{1}{4}$

* العبارة خاطئة

اذاً نقلل

المنطقة التي يوجد

فيها النقطة (0,0)



4.2 Linear Programming

* في هذا السكشن يأتي السؤال بطريقتين إما أن تكون المعطيات معطولة ونحن نبنيها أو تكون المعطيات مبنية من السؤال ذاته .

Example: مثال: عندما تكون المعطيات معطولة

Carpenter producing and selling Chairs and tables
$10 per chair
$15 per table

نفرض
x = number of chair بحيث $x \geq 0$
y = " " table " $y \geq 0$
⇒
الربح → $P = 10x + 15y$

Constraints

① each chair requirs $1m^2$ of wood — كل كرسي يحتاج $1m^2$ من الخشب
" table " $2m^2$ " " — كل طاولة تحتاج $2m^2$ من الخشب
and aVailible of wood each day $14m^2$ — سوف يكون الانتاج في اليوم $14m^2$
⇒ $1x + 2y \leq 14$

② each chair requirs 2 hours of Labor — كل كرسي يحتاج ساعتين
each table " 1 hours of " — كل طاولة تحتاج ساعة
the mximum number of hours is 10 each day — مدة العمل باليوم 10 ساعات
⇒ $2x + y \leq 10$

النتيجة النهائية

$$\begin{cases} x + 2y \leq 14 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 , y \geq 0 \end{cases}$$

object function
$P = 10x + 15y$

الحل ⇒

المطلوب في السؤال التالي

① Solution region : منطقة الحل

② corner point : زوايا منطقة الحل

③ maximum value : أكبر ربح

* بواسطة المعطيات نرسم الرسمة

⇒ ①

$$\begin{cases} x+2y \le 14 \\ 2x+y \le 10 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$x+2y=14$

x intercept $(14,0)$

$x+2.0=14 \Rightarrow \boxed{x=14}$

y intercept $(0,7)$

$0+2y=14 \Rightarrow \boxed{y=7}$

testPoint $(0,0)$

$0+2.0 \le 14$

$\boxed{0 \le 14}$ ✓

$2x+y=10$

x intercept $(5,0)$

$2x+0=10 \Rightarrow \boxed{x=5}$

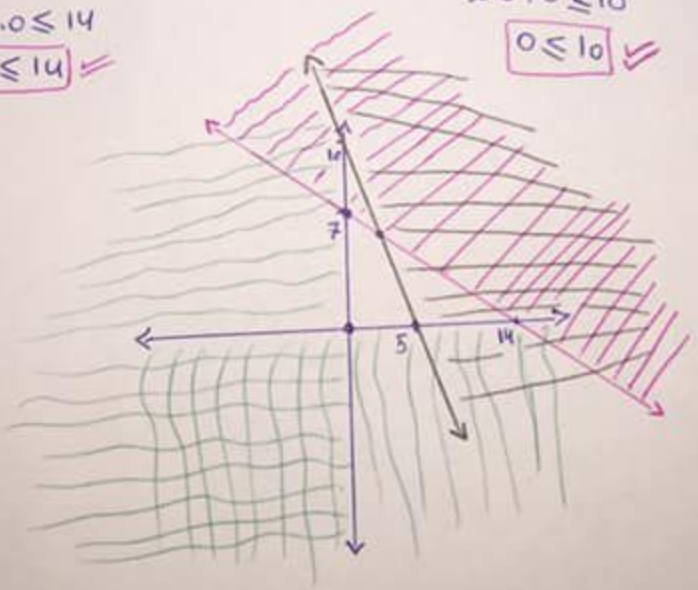
y intercept $(0,10)$

$2.0+y=10 \Rightarrow \boxed{y=10}$

testPoint $(0,0)$

$2.0+0 \le 10$

$\boxed{0 \le 10}$ ✓



②, ③ ⇒

② Corner Point

المعلومات ← (0,0), (0,7), (5,0), (??, ??) (2, 6)

* تبقى زاوية واحدة مجهولة نجدها عن طريق الحذف والتعويض

$-2(x+2y=14)$

$2x+y=10$

$-2x+-4y=-28$

$+\ 2x+y=10$

$-3y=-18 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x+2.6=14 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,6)$

$\frac{-3y}{-3} = \frac{-18}{-3}$

③ maximum Value :

$P=10x+15y$

Corners

$(0,0) \Rightarrow 10.0+15.0=0$

$(0,7) \Rightarrow 10.0+15.7=105$

$(5,0) \Rightarrow 10.5+15.0=50$

$(2,6) \Rightarrow 10.2+15.6=110$

maximum Value = 110

$x=2$

$y=6$

* لو طلب minimum يكون الجواب = 0

(0,0)

5.1

Exponential function
الدوال الأسية

$y = f(x) = a^x$

* ليس شرط الدالة بالرسم لازم تقص نقطة (0,1)

were a is real number (Positive)

$a \neq 0$

a is a base

* A: عبارة عن عدد حقيقي موجب أكبر من الصفر ولا يساوي واحد
* x: لا تساوي الصفر

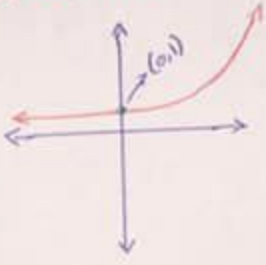
Examples

Graph أرسم

* عندما تكون A أكبر من واحد تكون الرسمة متزايدة (growth) لمر بالنقطة (أو 0)

① $f(x) = 2^x$

$\Rightarrow a = 2 > 1 \longrightarrow$ إذن رسمة متزايدة



(growth function)

② $y = 10^x$

③ $y = (\frac{5}{2})^x$

$y = e^x$

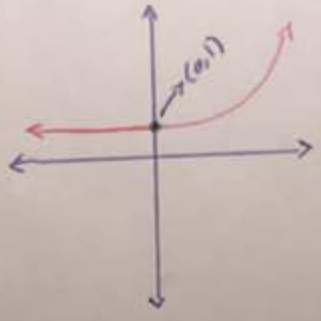
تشترك بنفس الرسمة

e: هو عدد النيبيري وقيمته تقريباً = 2.7

④ $y = (\frac{1}{2})^{-x}$

نبسطها

$((\frac{1}{2})^{-1})^x \Rightarrow (\frac{2}{1})^x = 2^x \Rightarrow a > 1$

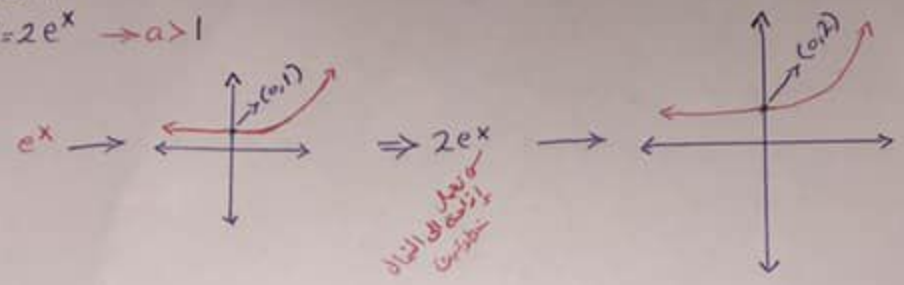


⇒

Example: Graph

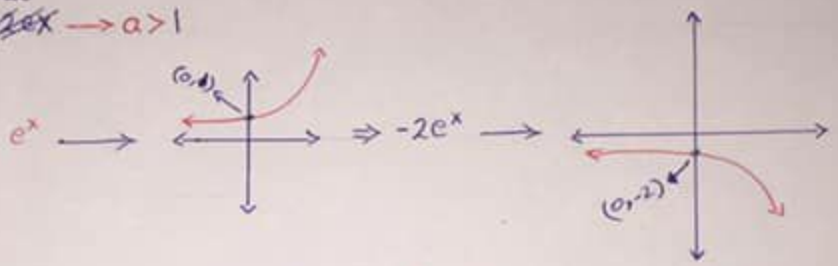
عندما تضرب بعدد موجب

① $y = 2e^x \rightarrow a > 1$



عندما تضرب بعدد سالب

② $y = \cancel{-2e^x}^{-2e^x} \rightarrow a > 1$



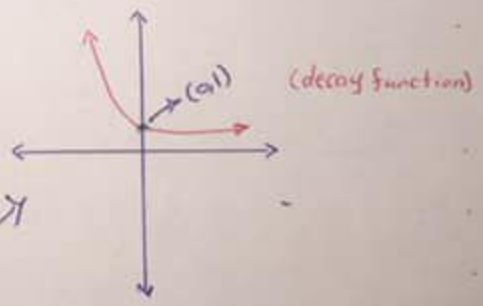
* عندما تضرب الاقتران بعدد سالب تنعكس الرسمة بحيث يكون الجزء الاقرب الى محور X في الاصلية اقرب اليه بعد الانعكاس وكذلك ■ الجزء الأبعد في الرسمة الاصلية يكون أبعد بعد الانعكاس .

Example:

Graph أرسم

* عندما تكون A أكبر من صفر وأصغر من 1 تكون الرسمة متناقصة (decay function) وتمر بالنقطة (0,1)

① $f(x) = (\frac{1}{2})^x \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \rightarrow$ اذاً متناقصة



② $y = (\frac{3}{4})^x \rightarrow a < 1$

③ $y = (\frac{5}{7})^x \rightarrow a < 1$

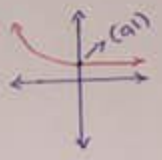
* نفس الرسمة

Example: Graph

(decay function).

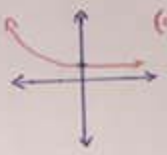
① $y = 2^{-x}$

نسطوها $\hookrightarrow (2^{-1})^x \Rightarrow (\frac{1}{2})^x \rightarrow a<1 \rightarrow$ ازاً متناقص



② $y = e^{-x}$

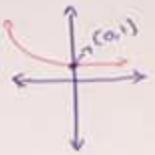
نسطوها $\hookrightarrow (e^{-1})^x \Rightarrow (\frac{1}{e})^x \Rightarrow (\frac{1}{2.7})^x \rightarrow a<1 \rightarrow$ ازاً متناقص



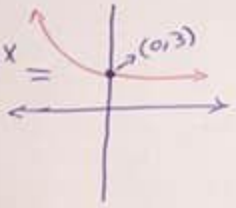
Example: Graph

① $y = 3e^{-x}$

$\hookrightarrow y = 3(\frac{1}{e})^x \Rightarrow (\frac{1}{e})^x \rightarrow$



$\Rightarrow 3(\frac{1}{e})^x =$

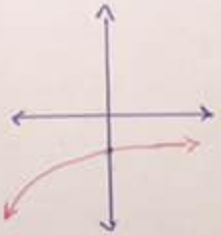


② $y = -2e^{-x}$

عندما يقترب بعيد سالب

$\hookrightarrow y = -2(\frac{1}{e})^x$

$\Rightarrow$



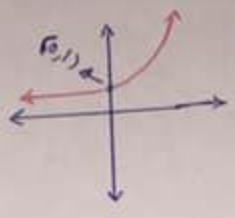
5.1

Outline

الأسئلة المطلوبة 6, 8, 10, 14, 16

⑥ Graph

$y = 8^x \rightarrow a > 1 \rightarrow$ إذا متزايد



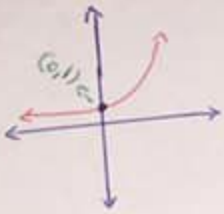
(growth function)

---

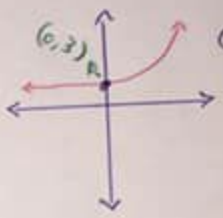
⑧ Graph

$y = 3(2^x)$

$\rightarrow y = 2^x \rightarrow$



$\Rightarrow y = 3(2^x) \rightarrow$

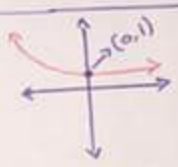


(growth)

---

⑩ Graph

$y = (\frac{2}{3})^x \rightarrow a < 1 \rightarrow$ إذا متناقص $\rightarrow$

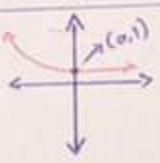


(decay function)

---

⑭ Graph

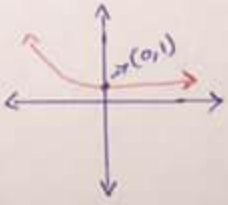
$y = 3^{-x} \Rightarrow y = (\frac{1}{3})^x \rightarrow a < 1 \rightarrow$



---

⑯ $y = 5e^{-x}$

$\hookrightarrow y = 5(\frac{1}{e})^x \rightarrow a < 1 \rightarrow (\frac{1}{e})^x \Rightarrow$



$\Rightarrow y = 5(\frac{1}{e})^x \Rightarrow$